

Ableitung und Kurvendiskussion

Klasse 11/12

Aufgaben 1-5

Schreibe zu jeder Aufgabe die Ableitung und die Bedingung auf. Die ersten fünf Aufgaben üben Ableitungsregeln und Steigungen; die nächsten fünf üben die Kurvendiskussion.

Name: _____

Datum: _____

01 Bilde die erste Ableitung: $f(x) = x^3$.

02 Bilde die erste Ableitung: $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$.

03 Bilde die erste Ableitung: $f(x) = 2x^3 + 5x$.

04 Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4x$. Berechne die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 3$.

05 Gegeben ist $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Bestimme die Stelle, an der der Graph die Steigung 0 hat.

Ableitung und Kurvendiskussion

Klasse 11/12

Aufgaben 6-10

Schreibe zu jeder Aufgabe die Ableitung und die Bedingung auf. Die ersten fünf Aufgaben üben Ableitungsregeln und Steigungen; die nächsten fünf üben die Kurvendiskussion.

Name: _____

Datum: _____

06 Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2$. Bestimme die Nullstellen und die Extrempunkte.

07 Gegeben ist $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Bestimme den Wendepunkt und das Krümmungsverhalten.

08 Gegeben ist $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Bestimme die Intervalle, in denen der Graph steigt und fällt.

09 Führe für $f(x) = x^3 - 3x$ eine Kurvendiskussion durch.

10 Für $0 \leq x \leq 6$ beschreibt $G(x) = -x^3 + 6x^2$ den Gewinn eines Betriebs (x in Hundert Stück, G in Hundert Euro). Bestimme die gewinnmaximale Menge.

Ableitung und Kurvendiskussion

Klasse 11/12

Lösungen 1-5

Vergleiche auch den Rechenweg. Prüfe bei Gleichungen durch Einsetzen.

01 Bilde die erste Ableitung: $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 3x^2$$

Potenzregel: Der Exponent 3 wird zum Faktor, der Exponent um 1 verkleinert. Also $f'(x) = 3x^2$.

02 Bilde die erste Ableitung: $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$.

$$f'(x) = 8x - 6$$

Faktor- und Summenregel: $4x^2$ ergibt $8x$, $-6x$ ergibt -6 , die Konstante 1 fällt weg.

03 Bilde die erste Ableitung: $f(x) = 2x^3 + 5x$.

$$f'(x) = 6x^2 + 5$$

$2x^3$ ergibt $6x^2$, und $5x$ ergibt 5, denn x ist x^1 .

04 Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4x$. Berechne die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 3$.

$$f'(3) = 2$$

$f'(x) = 2x - 4$. Einsetzen: $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. Der Graph steigt dort mit der Steigung 2.

05 Gegeben ist $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Bestimme die Stelle, an der der Graph die Steigung 0 hat.

$$x = 3$$

$f'(x) = 2x - 6$. Setze $f'(x) = 0$: $2x - 6 = 0$ ergibt $x = 3$. Dort liegt der Scheitelpunkt der Parabel.

Ableitung und Kurvendiskussion

Klasse 11/12

Lösungen 6-10

Vergleiche auch den Rechenweg. Prüfe bei Gleichungen durch Einsetzen.

06 Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2$. Bestimme die Nullstellen und die Extrempunkte.

Nullstellen $x = 0$ und $x = 3$; Hochpunkt $H(0|0)$, Tiefpunkt $T(2|-4)$

Nullstellen: $x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x - 3) = 0$, also $x = 0$ und $x = 3$. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2)$ und $f''(x) = 6x - 6$. Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 0$ oder $x = 2$. Wegen $f''(0) = -6$ ist $H(0|0)$ ein Hochpunkt, wegen $f''(2) = 6$ ist $T(2|-4)$ ein Tiefpunkt.

07 Gegeben ist $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Bestimme den Wendepunkt und das Krümmungsverhalten.

$W(2|2)$; linksgekrümmt für $x > 2$, rechtsgekrümmt für $x < 2$

$f''(x) = 6x - 12$ und $f'''(x) = 6$. Aus $f''(x) = 0$ folgt $x = 2$, wegen $f'''(2) = 6$ ist $W(2|2)$ ein Wendepunkt ($f(2) = 2$). Für $x > 2$ ist $f''(x)$ positiv, für $x < 2$ negativ.

08 Gegeben ist $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Bestimme die Intervalle, in denen der Graph steigt und fällt.

steigend für $x < 1$ und für $x > 3$; fallend für $1 < x < 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$. Für $x < 1$ und $x > 3$ ist $f'(x)$ positiv (steigend), für $1 < x < 3$ negativ (fallend).

09 Führe für $f(x) = x^3 - 3x$ eine Kurvendiskussion durch.

Nullstellen 0 , $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$; $H(-1|2)$, $T(1|-2)$, $W(0|0)$; punktsymmetrisch

Nullstellen: $x \cdot (x^2 - 3) = 0$, also $x = 0$, $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ und $x = -\sqrt{3}$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ ergibt $x = -1$ und $x = 1$. Wegen $f''(x) = 6x$ ist $f''(-1) = -6$ (Hochpunkt) und $f''(1) = 6$ (Tiefpunkt). Aus $f''(x) = 0$ folgt $x = 0$, wegen $f'''(0) = 6$ ist $W(0|0)$ ein Wendepunkt.

10 Für $0 \leq x \leq 6$ beschreibt $G(x) = -x^3 + 6x^2$ den Gewinn eines Betriebs (x in Hundert Stück, G in Hundert Euro). Bestimme die gewinnmaximale Menge.

$x = 4$, also 400 Stück; maximaler Gewinn 3 200 €

$G'(x) = -3x^2 + 12x = -3x \cdot (x - 4)$, also $x = 4$ ($x = 0$ ist ein Rand). Wegen $G''(4) = -12 < 0$ liegt dort das Maximum: $G(4) = 32$. Rand: $G(0) = G(6) = 0$, also 3 200 €.